L12 可微分的性質

3.2 Some differentiation formulas 微分的四則運算 多項式的微分

3.3 The d/dx notation and derivative of high order (微分的符號和高次項微分)

Thm: $\boxed{\text{If } f \text{ is diff. at } x, \text{ then } f \text{ is cont. at } x.}$

$\boxed{\text{若函數在該點可微，則函數在該點連續。}}$

pf:To show that $\lim_{t\to x} f(t)=f(x)$ (or 改成差值表法 $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$)

根據定義證明連續，解不下去了。

∵ f is diff. at x. 利用條件是在該點可微

∴ $\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]/h=f'(x)$ 想辦法把它變成 $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$的形式

∵ $\lim_{h\to 0} h=0$ 同乘 h，利用極限四則運算

∴ $\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]/h\cdot h= f'(x)\cdot 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]=0$

∵ $\lim_{h\to 0} f(x)=f(x)$ 同加 f(x)，利用極限四則運算

∴ $\lim_{h\to 0}\{[f(x+h)-f(x)]+f(x)\}=0+f(x)=f(x)\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$

Therefore f is cont. at x. 因此證得 f 在該點連續

cor:

① If f is not cont. at x, then f is not diff. at x.

② If f is diff on I, then f is cont. on I.

若可微，則必連續⇔若不連續，則必不可微。

Rmk:

Q:把差值表法改成變數表法？

① If f is diff. at x⇔$\lim_{t\to x}[f(t)-f(x)]/(x-t)$ exists.

Q:可微跟連續在圖形上有什麼差異？

② cont.在圖形上不斷，diff.在圖形上平滑。

L12 可微分的性質
3.2 Some differentiation formulas 微分的四則運算 多項式的微分
3.3 The d/dx notation and derivative of high order (微分的符號和高次項微分)

§ 3.2 Some differentiation formulas

如果要證可不可微，要證割線斜率的極限，也太煩了，所以這個時候要擺脫它的定義。可微是用極限定的，極限本身有四則運算，就會問可微有沒有四則運算。第二次講這個概念，第一次是在連續。

① 被定的東西本身有的性質，希望它帶到可微—可微函數的四則運算

② 四則運算不是函數大量構造的方式，真正構造的是合成—可微函數的合成

Thm(微分的四則運算)

Let f and g be diff. at x.Then

① f+g is diff. at x and (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x). f'(x)該點切線的斜率

口語：相加的微分等於微分相加

② α f is diff. at x and (α f)'(x)= α f'(x).

口語：乘常數的微分等於乘常數微分

③ fg is diff. at x and (fg)'(x)=f'(x)g(x)+ f(x)g'(x).

口語：相乘的微分等於一次只微一個，每個都要微，全部加起來。

④ If g(x)$\neq$0, then f/g is diff. at x and (f/g)'(x)=(f'g-g'f)/g^2.

口語：如果分母的取值不為 0
則相除的微分等於，每次只微一個，分子先微分母後微相減，除分母取值的平方。

pf:

①

Q:從所求想起，求相加在 x 可微，如何證相加在 x 可微分？
A:相加在 x 滿足定義，相加割線斜率的極限存在。

$\lim(h\to0)\{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]\}/h$

$= \lim(h\to0)\{[f(x+h)- f(x)]+[g(x+h)- g(x)]\}/h$

$\because$ f is diff at $\therefore$ $\lim(h\to0)$ $[f(x+h)- f(x)]/h=f'(x)$

$\because$ g is diff at $\therefore$ $\lim(h\to0)$ $[g(x+h)- g(x)]/h$ $g'(x)$

L12 可微分的性質
3.2 Some differentiation formulas 微分的四則運算 多項式的微分
3.3 The d/dx notation and derivative of high order (微分的符號和高次項微分)

$=f'(x)+g'(x)$

Therefore f+g is diff. at x and $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

Q:四則運算的馬上會被用在哪一個函數？A:多項式。在發展成有理函數。

Thm: Let $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0$ be a polynomial.Then P is diff on $\mathbb{R}$ and

$P'(x)= na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots 2a_1x+a_1$.

pf:先想，不然不會知道哪裡不會？

Lemmal 1:1is diff. on $\mathbb{R}$ and $1'=0$ Lemmal 引領

Q:證 1 可微證什麼？A:證 1 割線斜率的極限
y 差值除 x 差值的極限。y 差值爲 0，分子爲零，分數爲 0，取極限爲 0。

Lemmal 2 :x is diff. on $\mathbb{R}$ and $x'=1$

y 差值除 x 差值的極限。y 差值爲 h，x 差值爲 h，分數爲 1，取極限爲 1。

cor: $(x^n)'=nx^{n-1}$, $\forall$ $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\{0,1,2,3\cdots\}$ 多一個係數等於指數，指數減 1

$(x^n)'=(x......x)'=nx^{n-1}$

根據相乘的微分等於一次只微一個，每個都要微，全部加起來

Thm: Let $R(x)=P(x)/Q(x)$ be a rational function.

Then R(x) is diff. every where except at where $Q(x)=0$.

by the way 這個地方不用寫 R'(x)是多少，爲什麼？這是一個分數，用微分法則。

Thm: Let $F(x)=x^n$, where $n\in\mathbb{Z}^-=\{-1,-2,-3,......\}$

Then $F'(x)=nx^{n-1}$.

pf:Let n=-k, then $k\in\mathbb{Z}^+$

$F'(x)=(x^n)'=(x^{-k})'=(1/x^k)'=(0-kx^{k-1})/x^{2K}=-kx^{-k-1}=nx^{n-1}$

L12 可微分的性質

3.2 Some differentiation formulas 微分的四則運算 多項式的微分

3.3 The d/dx notation and derivative of high order (微分的符號和高次項微分)

eg.

① (12x^3-1/x^2+7)'=36x^2+2/x^3

② [(x^3+2x-3)(2/x^7+5x)]'=(3x^2+2)(2/x^7+5x)+(x^3+2x-3)(-14/x^8+5)

③ [(4x^2+x+1)/(x^2+1)]'=[(8x+1)(x^2+1)-(4x^2+x+1)(2x)]/(x^2+1)^2

By the way 例子只是操作公式，公式一定要背熟。
千萬不要從作例子被公式，因爲往往會有第 101 個例子出來。

Ex:122(9.14.20.28.30.66)

§ 3.3 The d/dx notation and derivative of higher order

微分符號和高次微分。微分可以作很多次。

Def: $\boxed{\text{Let } y=f(x),\ f'(x)=df/dx=dy/dx=d/dx\ f(x)=d/dx\ y}$ 微分符號

eg. d/dx(1/x^2-1/x^5+1/x^7-1)=-2/x^3+5/x^6-7/x^8

① ':

$f \to f' \to (f')'$定義成 $f'' \to (f'')'$定義成 $f''' \to f^{(k)}$

連(k)微 k 次，f 的 k 次微分。沒有括弧爲 f 的 k 次方
定義成(等於上加三角形)。

② d/dx:

$d/dx\ f \to d/dx(df/dx)$定義成 $d^2f/dx^2 \to d/dx(d^2f/dx^2)$定義成 $d^3f/dx^3 \to d^kf/dx^k$

by the way d/dx 有變數，'沒有變數

g(t)的 10 次微分爲？$d^{10}g/dt^{10}$

w(u)的 99 次微分爲？$d^{99}w/du^{99}$

Ex:p128(14.20.26.38.56)